



## The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# 两个环面可以共享相同的局部几何而仍然是不同的形状

IHÉS《数学出版物》中的一项构造给出了第一批紧致 *Bonnet* 对：两个光滑的、实解析的三维空间环面，在对应点具有相同的内在度量和相同的平均曲率，但在刚体运动意义下并不相同。这一结果关闭了曲面几何学中古老的唯一性问题，是对一个诱人想法——足够多的局部测量一定能识别紧致形状——的精确反例。

---

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHÉS · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

# 拒绝被识别的形状

想象测量一个曲面，却不允许走到它外面去。你可以沿着它测量距离：如果沿曲面本身旅行，一点到另一点有多远。这就是曲面的度量。现在从外部再添加一项测量：在每个点上记录曲面的平均弯曲程度，即其平均曲率。

这听起来像是大量的信息。对于许多曲面来说，这确实足够了。如果你知道了内在距离和平均曲率函数，你可能会期望三维空间中的形状已经被确定下来。

Alexander Bobenko、Tim Hoffmann 和 Andrew Sageman-Furnas 现在构造了打破这一期望的紧致曲面。他们的论文给出了两个环面——甜甜圈形状的曲面，尽管不是普通的圆甜甜圈——它们是等距的，并且在对应点上具有相同的平均曲率，但它们并不合同。你无法通过旋转、平移或反射将一个变成另一个。它们在空间中是真正不同的浸入。

用该领域的语言来说，它们是紧致 Bonnet 对。论文称它们为第一批这样的例子。

## 问题是什么

经典曲面理论区分为两种信息。

度量告诉你沿曲面测量的距离。一张平板卷成圆柱体保持相同的内在度量：一只在平板上行走的小蚂蚁仅凭距离测量不会注意到卷曲。完整的第二基本形式则告诉你更多关于曲面如何在空间中弯曲的信息。经典的 Bonnet 定理说，只要度量与完整的弯曲数据满足正确的相容方程，浸入就在刚体运动的意义下被确定。

但在 1867 年，Pierre Ossian Bonnet 提出了一个更锋利的问题。如果弯曲数据被简化了呢？既然度量已经内在确定了高斯曲率，一个曲面能否由度量加上平均曲率函数来刻画？

通常的答案是肯定的。这个词很重要。几何学经常有特例：特殊的曲面，其通常的唯一性陈述失效。开放的问题是是否存在紧致光滑的例子，其中度量和平均曲率一致，但曲面在空间中并不相同。

这就是 Global Bonnet 问题。这篇新论文用环面给出了答案。

## 作者构造了什么

作者构造了  $R^3$  中一对光滑环面，它们由一个保平均曲率的等距相关联。这意味着对应点具有相同的周围内在距离和相同的平均曲率值，但两个曲面不是合同的。

这一构造不仅仅是产生单一的数值奇观。这些环面是实解析的——与幂级数几何一样正则，不是粗糙拼接的对象——并且作者证明，他们的例子在通用情况下不与任何空间等距相关联。他们还声明，他们的构造给出了不可数多个这样的对，因为它包含一个函数参数。

路径是技术性的。它使用了 Bonnet 对与等温曲面之间的关系，一类具有特殊曲率线坐标的曲面。这些

例子通过从具有一族平面曲率线的等温环面出发，并应用产生 Bonnet 对的构造而获得。作者说，该方法的出现源于对环面  $5 \times 7$  四边形分解的计算实验，使用离散微分几何作为通向光滑结果的引导。

视觉结果比证明更容易理解。论文中的两个环面具有匹配的几何数据，但具有明显不同的全局位置：在作者的图 1 中，对应的大「气泡」在一个环面上比另一个更靠近。那种可见的差异不是绘画技巧。定理说这些曲面在空间中不是相同的形状，即使所选的局部数据一致。

[figure\_pair pending]

论文中的图 1 显示了 Bonnet 对环面的一个数值例子，此处展示为一对配对图。两个面板不是同一个环面的两个视图：它们是对中两个不同的环面。灰色网格线帮助眼睛跟随相应的曲面坐标，而彩色曲线标记相应的曲率线环。图画的重点是全局不匹配：大气泡位于明显不同的位置，即使定理说两个曲面在对应点具有相同的内蕴度和相同的平均曲率。

## 为什么这不矛盾

这一结果并不是说几何学是任意的，或者测量是无用的。

它说的是，一个特定的简化数据集——度量加平均曲率——并不总是足以唯一地识别一个紧致曲面。完整的经典唯一性定理使用更丰富的弯曲信息。平均曲率只是两个主曲率的平均值。它告诉你曲面在一点的平均弯曲程度，但它并不能保留所有方向性弯曲信息。

这一区别就是全部要点。两个曲面可以在沿曲面的距离和在每个对应点的平均弯曲上一致，但在那种弯曲在空间中被安排的方式上不同。

论文也没有说这种歧义是典型的。引言审慎地指出：通常而言，度量加平均曲率确定一个曲面。Bonnet 对是特例。它们的价值恰恰在于表明这种例外存在于紧致、光滑、解析的环境中——这一问题此前一直未解决。

## 它关闭了哪些古老的问题

第一个关闭的问题是 Global Bonnet 问题：是否存在两个不合同的紧致光滑浸入于三维欧几里得空间中，由一个等距相关联且在对应点具有相同的平均曲率？作者的回答是肯定的。

第二个是 Cohn-Vossen-Berger 问题：是否存在两个等距的紧致解析曲面于欧几里得三维空间中，且不与任何空间等距相关联？答案同样是肯定的，使用了通过同一构造获得的解析环面。

解析性很重要。之前的紧致曲面非唯一性例子可能依赖于较低的正则性或局部改动。这些环面不仅仅是光滑对象在某个补丁上换了个凸起。论文强调相应的邻域在任何地方都不局部合同：差异散布在整个构造中，而非隐藏在修补接缝中。

# 为什么重要

这是纯数学，但其直觉是广泛的。一个形状在一种意义上可以被过度确定，而在另一种意义上仍然被欠识别。重要的不是你拥有多少数据，而是数据是否包含正确类型的信息。

度量加平均曲率感觉很强，因为它将内部距离与外在弯曲度量结合在一起。紧致 Bonnet 对展示了差距：平均弯曲不是完全弯曲。局部一致性不是全局识别。解析正则性不是神奇的唯一性保证。

这是一个超越该定理的有用教训。在几何学中，逆问题常常问一组测量是否确定产生它们的对象。这篇论文对一个经典曲面问题给出了一个锋利的新答案：不总是如此，即使当对象是紧致、光滑和解析的时候。

## 清洁摘要

Bobenko、Hoffmann 和 Sageman-Furnas 构造了第一批紧致 Bonnet 对：两个不合同的  $R^3$  中的光滑环面，由一个等距相关联且在对对应点具有相同的平均曲率。他们的例子是实解析的，且不通过任何空间等距相关联，从而解决了论文所述的 Global Bonnet 问题和 Cohn-Vossen-Berger 解析唯一性问题。这一结果并未颠覆经典曲面理论；它表明度量加平均曲率的简化数据并不总是足以唯一识别一个紧致曲面。

## No-BS 检查

**论文所展示的：**紧致光滑 Bonnet 对存在。更具体地说，作者明确构造了  $R^3$  中的环面，在对对应点具有相同的度量和平均曲率函数，但它们不是合同的。

**合理但并非要点的：**计算和离散几何探索可以引导困难的光滑构造。论文说这条路径很重要，但结果依赖于证明，而非数值图片。

**它没有展示的：**所有或大多数曲面是模糊的。通用的唯一性陈述仍然是背景的一部分。这些是例外但决定性的反例。

**对一般读者的主要局限：**这个证明是高度技术性的，生活在微分几何中：等温曲面、Bonnet 对分类、周期条件和解析构造。读者可以在不追随其机械结构的情况下理解该定理的含义。

**普通读者应该抱有多大信心？**对该定理陈述作为一项同行评审的数学结果信心高。正确的谨慎是诠释性的，而非证据性的：将其解读为「这个简化的几何数据并不总是确定形状」，而非「几何学无法识别形状」。

---

## 来源

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>