



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dwa torusy mogą mieć tę samą geometrię lokalną, a mimo to różnić się kształtem

*Konstrukcja opublikowana w *Publications mathématiques de l'IHÉS* daje pierwsze zwarte pary Bonneta: dwa gładkie, analityczne w sensie rzeczywistym torusy w przestrzeni trójwymiarowej, które mają tę samą metrykę wewnętrzną i tę samą krzywiznę średnią w odpowiadających sobie punktach, lecz nie są tą samą powierzchnią z dokładnością do ruchu sztywnego. Wynik zamyka dawne pytania o jednoznaczność w geometrii powierzchni i stanowi precyzyjny kontrprzykład dla kuszącej idei, że dostatecznie liczne pomiary lokalne muszą rozpoznawać zwarty kształt.*

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, *Publications mathématiques de l'IHÉS* · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Kształt, którego nie da się jednoznacznie rozpoznać

Wyobraźmy sobie, że mierzymy powierzchnię, nie mogąc wyjść poza nią. Możemy mierzyć odległości wzdłuż powierzchni: jak daleko leży jeden punkt od drugiego, jeśli poruszamy się po samej powierzchni. To jest jej metryka. Dodajmy teraz jeszcze jeden pomiar wykonywany z zewnątrz: w każdym punkcie zapisujemy średnie wygięcie powierzchni, czyli jej krzywiznę średnią.

Wydaje się, że to bardzo dużo informacji. Dla wielu powierzchni rzeczywiście wystarcza. Znając odległości wewnętrzne i funkcję krzywizny średniej, można by oczekiwać, że kształt w przestrzeni trójwymiarowej zostanie jednoznacznie wyznaczony.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann i Andrew Sageman-Furnas skonstruowali jednak zwarte powierzchnie, które przeczą temu oczekiwaniu. W ich pracy przedstawiono dwa torusy — powierzchnie w kształcie obwarzanka, choć nie zwykle okrągłe obwarzanki — które są izometryczne i mają tę samą krzywiznę średnią w odpowiadających sobie punktach, lecz nie są przystające. Jednego nie da się przeprowadzić w drugi przez obrót, przesunięcie ani odbicie. Są to naprawdę różne zanurzenia w przestrzeni.

W języku tej dziedziny tworzą one zwartą parę Bonneta. Autorzy nazywają je pierwszymi takimi przykładami.

Na czym polega problem

Klasyczna teoria powierzchni rozróżnia dwa rodzaje informacji.

Metryka opisuje odległości mierzone na powierzchni. Płaski arkusz zwinięty w walec zachowuje tę samą metrykę wewnętrzną: mała mrówka chodząca po arkuszu nie wykryłaby zwinięcia, mierząc wyłącznie odległości. Pełna druga forma podstawowa mówi znacznie więcej o tym, jak powierzchnia wygina się w przestrzeni. Klasyczne twierdzenie Bonneta głosi, że jeśli metryka i pełne dane o wygięciu spełniają właściwe równania zgodności, zanurzenie jest wyznaczone z dokładnością do ruchu sztywnego.

W 1867 roku Pierre Ossian Bonnet postawił jednak ostrzejsze pytanie. Co się stanie, jeśli ograniczymy dane o wygięciu? Skoro metryka już wewnętrznie wyznacza krzywiznę Gaussa, czy powierzchnię można scharakteryzować za pomocą metryki i funkcji krzywizny średniej?

Ogólnie rzecz biorąc, odpowiedź brzmi: tak. To zastrzeżenie jest istotne. W geometrii często występują przypadki wyjątkowe — szczególne powierzchnie, dla których zwykle twierdzenie o jednoznaczności zawodzi. Otwarte pozostawało pytanie, czy istnieją zwarte, gładkie przykłady, w których metryka i krzywizna średnia są zgodne, choć powierzchnie w przestrzeni nie są takie same.

To globalny problem Bonneta. Nowa praca rozwiązuje go za pomocą torusów.

Co skonstruowali autorzy

Autorzy konstruują parę gładkich torusów w R^3 powiązanych izometrią zachowującą krzywiznę średnią. Oznacza to, że odpowiadające sobie punkty mają takie same odległości wewnętrzne w swoim otoczeniu i tę samą wartość krzywizny średniej, ale oba torusy nie są przystające.

Konstrukcja nie sprowadza się do pojedynczej ciekawostki numerycznej. Torusy są analityczne w sensie rzeczywistym — mają regularność właściwą geometrii opisywanej szeregami potęgowymi, a nie obiektom złożonym z nieregularnie połączonych fragmentów — a autorzy dowodzą, że ogólnie ich przykłady nie są powiązane żadną izometrią otaczającej przestrzeni. Stwierdzają też, że konstrukcja daje nieprzeliczalnie wiele takich par, ponieważ zawiera parametr funkcyjny.

Droga do wyniku jest techniczna. Wykorzystuje związek między parami Bonneta a powierzchniami izotermicznymi, czyli klasą powierzchni o szczególnych współrzędnych wyznaczonych przez linie krzywizny. Przykłady powstają przez rozpoczęcie od izotermicznych torusów, w których jedna rodzina linii krzywizny jest płaska, a następnie zastosowanie konstrukcji wytwarzającej parę Bonneta. Autorzy piszą, że podejście wyrosło z eksperymentów obliczeniowych z podziałem torusa na czworokąty w układzie 5×7 ; dyskretna geometria różniczkowa posłużyła jako przewodnik do wyniku gładkiego.

Efekt wizualny łatwiej zrozumieć niż dowód. Dwa torusy przedstawione w pracy mają zgodne dane geometryczne, ale widocznie różnią się globalnym ułożeniem: na rycinie 1 autorów odpowiadające sobie duże „pęcherze” leżą na jednym torusie bliżej siebie niż na drugim. Ta widoczna różnica nie jest sztuczką rysunkową. Twierdzenie mówi, że powierzchnie nie mają tego samego kształtu w przestrzeni, mimo zgodności wybranych danych lokalnych.

[figure_pair pending]

Rycina 1 z pracy przedstawia numeryczny przykład torusów tworzących parę Bonneta, pokazany tutaj jako zestaw dwóch ilustracji. Panele nie są dwoma widokami tego samego torusa: przedstawiają dwa różne torusy należące do pary. Szare linie siatki ułatwiają śledzenie odpowiadających sobie współrzędnych powierzchni, a kolorowe krzywe oznaczają odpowiadające sobie zamknięte linie krzywizny. Sednem ilustracji jest globalna niezgodność: duże pęcherze znajdują się w wyraźnie różnych położeniach, choć zgodnie z twierdzeniem oba torusy mają tę samą metrykę wewnętrzną i tę samą krzywiznę średnią w odpowiadających sobie punktach.

Dlaczego nie ma tu sprzeczności

Wynik nie mówi, że geometria jest dowolna ani że pomiary są bezużyteczne.

Mówi, że konkretny ograniczony zestaw danych — metryka wraz z krzywizną średnią — nie zawsze wystarcza do jednoznacznego rozpoznania zwartej powierzchni. Pełne klasyczne twierdzenie o jednoznaczności wykorzystuje bogatsze dane o wygięciu. Krzywizna średnia jest tylko średnią dwóch krzywizn głównych. Informuje, jak bardzo powierzchnia wygina się średnio w danym punkcie, lecz nie zachowuje pełnej informacji o wygięciu w poszczególnych kierunkach.

Na tym właśnie polega zasadnicze rozróżnienie. Dwie powierzchnie mogą mieć zgodne odległości

mierzone wzdłuż nich oraz takie samo średnie wygięcie w każdym odpowiadającym sobie punkcie, a mimo to różnić się sposobem rozmieszczenia tego wygięcia w przestrzeni.

Praca nie twierdzi też, że taka niejednoznaczność jest typowa. Wprowadzenie wyraźnie zaznacza: ogólnie metryka wraz z krzywizną średnią wyznacza powierzchnię. Pary Bonneta są wyjątkami. Ich znaczenie polega właśnie na wykazaniu, że wyjątek istnieje także w zwartym, gładkim i analitycznym przypadku, który dotąd pozostawał nierozstrzygnięty.

Jakie dawne pytania zamyka wynik

Pierwszym zamkniętym pytaniem jest globalny problem Bonneta: czy istnieją dwa nieprzystające, zwarte i gładkie zanurzenia w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, powiązane izometrią i mające tę samą krzywiznę średnią w odpowiadających sobie punktach? Autorzy odpowiadają twierdząco.

Drugim jest problem Cohna-Vossena-Bergera: czy w euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej istnieją dwie izometryczne, zwarte powierzchnie analityczne, których nie łączy izometria otaczającej przestrzeni? Tu również odpowiedź brzmi: tak, dzięki analitycznym torusom uzyskanym w tej samej konstrukcji.

Analityczność jest ważna. Wcześniejsze przykłady niejednoznaczności dla powierzchni zwartych mogły opierać się na niższej regularności albo lokalnych modyfikacjach. Te torusy nie są jedynie gładkimi obiektami, w których na jednym fragmencie podmieniono wybrzuszenie. Autorzy podkreślają, że odpowiadające sobie otoczenia nigdzie nie są lokalnie przystające: różnica przenika całą konstrukcję, a nie kryje się w miejscu zszycia.

Dlaczego to ważne

To czysta matematyka, ale stojąca za nią intuicja ma szerokie zastosowanie. Kształt może być nadmiernie określony pod jednym względem, a wciąż niedookreślony pod innym. Liczy się nie sama ilość danych, lecz to, czy zawierają one właściwy rodzaj informacji.

Metryka wraz z krzywizną średnią wydaje się mocnym zestawem, bo łączy odległości wewnętrzne z zewnętrzną miarą wygięcia. Zwarta para Bonneta pokazuje lukę: średnie wygięcie nie jest pełną informacją o wygięciu. Lokalna zgodność nie zawsze prowadzi do globalnej identyfikacji. Analityczna regularność nie daje automatycznej gwarancji jednoznaczności.

To użyteczna lekcja wykraczająca poza samo twierdzenie. W geometrii problemy odwrotne często pytają, czy zestaw pomiarów jednoznacznie wyznacza obiekt, który je wytworzył. Ta praca udziela ostrej nowej odpowiedzi dla klasycznego problemu teorii powierzchni: nie zawsze, nawet jeśli obiekt jest zwarty, gładki i analityczny.

Czyste podsumowanie

Bobenko, Hoffmann i Sageman-Furnas konstruuja pierwsze zwarte pary Bonneta: dwa nieprzystające gładkie torusy w R^3 , które są powiązane izometrią i mają tę samą krzywiznę średnią w odpowiadających sobie punktach. Ich przykłady są rzeczywiście analityczne i ogólnie nie łączy ich żadna izometria otaczającej przestrzeni, co rozstrzyga zarówno globalny problem Bonneta, jak i analityczne pytanie o jednoznaczność Cohna-Vossena-Bergera w sformułowaniu przyjętym w pracy. Wynik nie obala klasycznej teorii powierzchni; pokazuje, że ograniczone dane w postaci metryki i krzywizny średniej nie zawsze wystarczają do jednoznacznego rozpoznania zwartej powierzchni.

Kontrola bez upiększeń

Co pokazuje praca: Istnieją zwarte, gładkie pary Bonneta. Dokładniej: autorzy jawnie konstruuja torusy w R^3 o tej samej metryce i funkcji krzywizny średniej w odpowiadających sobie punktach, które nie są przystające.

Co jest wiarygodne, ale nie stanowi sedna: Eksploracja obliczeniowa i dyskretno-geometryczna może prowadzić do trudnych konstrukcji gładkich. Autorzy podkreślają znaczenie tej drogi, lecz wynik opiera się na dowodzie, a nie na obrazie numerycznym.

Czego praca nie pokazuje: Że wszystkie albo większość powierzchni jest niejednoznaczna. Ogólne twierdzenie o jednoznaczności pozostaje częścią tła. Są to wyjątkowe, ale rozstrzygające kontrprzykłady.

Główne ograniczenia dla niespecjalisty: Dowód jest wysoce techniczny i należy do geometrii różniczkowej: obejmuje powierzchnie izotermiczne, klasyfikacje par Bonneta, warunki okresowości i konstrukcję analityczną. Znaczenie twierdzenia można zrozumieć bez śledzenia całego aparatu.

Jak duże zaufanie powinien mieć zwykły czytelnik? Duże w odniesieniu do treści twierdzenia jako recenzowanego wyniku matematycznego. Ostrożność dotyczy interpretacji, nie siły dowodowej: należy czytać wynik jako „ten ograniczony zestaw danych geometrycznych nie zawsze wyznacza kształt”, a nie jako „geometria nie potrafi rozpoznawać kształtów”.

Źródła

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>