



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Deux tores peuvent partager la même géométrie locale et rester des formes différentes

Une construction dans les Publications mathématiques de l'IHES donne les premières paires de Bonnet compactes : deux tores lisses, analytiques réels, dans l'espace tridimensionnel, qui ont la même métrique intrinsèque et la même courbure moyenne aux points correspondants, mais ne sont pas la même surface à un mouvement rigide près. Le résultat ferme d'anciennes questions d'unicité en géométrie des surfaces, et c'est un contre-exemple précis à une idée tentante : assez de mesures locales devraient identifier une forme compacte.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

La forme qui refuse d'être identifiée

Imaginez mesurer une surface sans avoir le droit de sortir d'elle. Vous pouvez mesurer les distances le long de cette surface : à quelle distance se trouve un point d'un autre si l'on se déplace sur la surface elle-même. C'est la métrique de la surface. Ajoutez maintenant une mesure venue de l'extérieur : en chaque point, notez la courbure moyenne de la surface, c'est-à-dire sa courbure moyenne.

Cela semble beaucoup d'information. Pour de nombreuses surfaces, c'est assez. Si l'on connaît les distances intrinsèques et la fonction de courbure moyenne, on pourrait s'attendre à ce que la forme dans l'espace tridimensionnel soit fixée.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann et Andrew Sageman-Furnas viennent de construire des surfaces compactes qui défont cette attente. Leur article donne deux tores — des surfaces en forme de beignet, mais pas des beignets ronds ordinaires — qui sont isométriques et ont la même courbure moyenne aux points correspondants, mais ne sont pas congruents. On ne peut pas faire tourner, translater ou réfléchir l'un pour obtenir l'autre. Ce sont réellement deux immersions différentes dans l'espace.

Dans le langage du domaine, ce sont des paires de Bonnet compactes. L'article les présente comme les premiers exemples de ce type.

Quel est le problème

La théorie classique des surfaces distingue deux sortes d'information.

La métrique indique les distances mesurées sur la surface. Une feuille plane roulée en cylindre conserve la même métrique intrinsèque : une petite fourmi marchant sur la feuille ne remarquerait pas l'enroulement en ne mesurant que les distances. La seconde forme fondamentale complète en dit beaucoup plus sur la manière dont la surface se courbe dans l'espace. Le théorème de Bonnet classique dit qu'avec la métrique et les données complètes de courbure satisfaisant les bonnes équations de compatibilité, l'immersion est déterminée à un mouvement rigide près.

Mais en 1867, Pierre Ossian Bonnet a posé une question plus fine. Que se passe-t-il si l'information de courbure est réduite ? Puisque la métrique détermine déjà intrinsèquement la courbure gaussienne, une surface peut-elle être caractérisée par la métrique plus la fonction de courbure moyenne ?

Génériquement, la réponse est oui. Ce mot compte. La géométrie a souvent des cas exceptionnels : des surfaces spéciales où l'énoncé d'unicité habituel échoue. La question ouverte était de savoir s'il existait des exemples compacts et lisses où la métrique et la courbure moyenne coïncident mais où les surfaces ne sont pas les mêmes dans l'espace.

C'est le problème global de Bonnet. Le nouvel article y répond avec des tores.

Ce que les auteurs ont construit

Les auteurs construisent une paire de tores lisses dans $\mathbb{R}^3$ liés par une isométrie qui préserve la courbure moyenne. Cela signifie que les points correspondants ont les mêmes distances intrinsèques autour d'eux et la même valeur de courbure moyenne, mais que les deux surfaces ne sont pas congruentes.

La construction ne produit pas seulement une curiosité numérique isolée. Les tores sont analytiques réels — aussi réguliers qu'une géométrie de séries entières, pas des objets rugueux rapiécés — et les auteurs prouvent que, génériquement, leurs exemples ne sont liés par aucune isométrie de l'espace ambiant. Ils affirment aussi que leur construction donne une infinité non dénombrable de telles paires, parce qu'elle contient un paramètre fonctionnel.

Le chemin est technique. Il utilise le lien entre les paires de Bonnet et les surfaces isothermiques, une classe de surfaces dotées de coordonnées particulières de lignes de courbure. Les exemples naissent en partant de tores isothermiques avec une famille de lignes de courbure planes, puis en appliquant une construction qui produit la paire de Bonnet. Les auteurs disent que l'approche est née d'expériences computationnelles avec une décomposition quadrangulaire 5×7 d'un tore, en utilisant la géométrie différentielle discrète comme guide vers le résultat lisse.

Le résultat visuel est plus facile à saisir que la preuve. Les deux tores de l'article ont les mêmes données géométriques mais une disposition globale visiblement différente : dans la figure 1 des auteurs, de grandes « bulles » correspondantes sont plus proches l'une de l'autre sur un tore que sur l'autre. Cette différence visible n'est pas un truc de dessin. Le théorème dit que les surfaces ne sont pas la même forme dans l'espace, même si les données locales choisies coïncident.

[figure_pair pending]

La figure 1 de l'article montre un exemple numérique des tores formant une paire de Bonnet, présenté ici comme une figure appariée. Les deux panneaux ne sont pas deux vues du même tore : ce sont les deux tores différents de la paire. Les lignes de maillage grises aident à suivre les coordonnées de surface correspondantes, tandis que les courbes colorées marquent des boucles de lignes de courbure correspondantes. Le point de l'image est le décalage global : les grandes bulles occupent des positions visiblement différentes, même si le théorème dit que les deux surfaces ont la même métrique intrinsèque et la même courbure moyenne aux points correspondants.

Pourquoi ce n'est pas une contradiction

Le résultat ne dit pas que la géométrie est arbitraire, ni que les mesures sont inutiles.

Il dit qu'un ensemble particulier de données réduites — métrique plus courbure moyenne — ne suffit pas toujours à identifier une surface compacte de façon unique. Le théorème classique complet d'unicité utilise une information de courbure plus riche. La courbure moyenne n'est qu'une moyenne des deux courbures principales. Elle dit de combien la surface se courbe en moyenne en un point,

mais elle ne conserve pas toute l'information directionnelle de courbure.

Cette distinction est tout le sujet. Deux surfaces peuvent coïncider sur les distances le long de la surface et sur la courbure moyenne en chaque point correspondant, tout en différant dans la manière dont cette courbure est organisée dans l'espace.

L'article ne dit pas non plus que cette ambiguïté est typique. L'introduction est prudente : génériquement, la métrique plus la courbure moyenne détermine une surface. Les paires de Bonnet sont exceptionnelles. Leur valeur est précisément de montrer que l'exception existe dans le cadre compact, lisse et analytique où elle restait non résolue.

Quelles anciennes questions cela ferme

La première question fermée est le problème global de Bonnet : existe-t-il deux immersions compactes lisses non congruentes dans l'espace euclidien tridimensionnel, liées par une isométrie et ayant la même courbure moyenne aux points correspondants ? Les auteurs répondent oui.

La seconde est le problème de Cohn-Vossen-Berger : existe-t-il deux surfaces compactes analytiques isométriques dans l'espace euclidien à trois dimensions qui ne soient pas liées par une isométrie ambiante ? Là encore, la réponse est oui, avec les tores analytiques obtenus par la même construction.

La partie analytique est importante. Les exemples antérieurs de non-unicité pour des surfaces compactes pouvaient dépendre d'une régularité plus faible ou de modifications locales. Ces tores ne sont pas simplement un objet lisse avec une bosse échangée dans une zone. L'article souligne que les voisinages correspondants ne sont nulle part localement congruents : la différence est répartie dans la construction, pas cachée dans une couture.

Pourquoi c'est important

C'est de la mathématique pure, mais l'intuition est large. Une forme peut être surdéterminée en un sens et rester sous-identifiée en un autre. Ce qui compte n'est pas la quantité de données, mais le fait que ces données contiennent le bon type d'information.

Métrique plus courbure moyenne semble fort parce que cela combine les distances internes avec une mesure extrinsèque de courbure. La paire de Bonnet compacte montre la faille : la courbure moyenne n'est pas toute la courbure. L'accord local n'est pas toujours l'identification globale. La régularité analytique n'est pas une garantie magique d'unicité.

C'est une leçon utile au-delà de ce théorème. En géométrie, les problèmes inverses demandent souvent si un ensemble de mesures détermine l'objet qui les a produites. Cet article donne une réponse nouvelle et nette pour un problème classique de surfaces : pas toujours, même quand l'objet est compact, lisse et analytique.

Résumé clair

Bobenko, Hoffmann et Sageman-Furnas construisent les premières paires de Bonnet compactes : deux tores lisses non congruents dans $\mathbb{R}^3$ qui sont liés par une isométrie et ont la même courbure moyenne aux points correspondants. Leurs exemples sont analytiques réels et, génériquement, ne sont liés par aucune isométrie ambiante, résolvant à la fois le problème global de Bonnet et la question d'unicité analytique de Cohn-Vossen-Berger telle qu'elle est formulée dans l'article. Le résultat ne renverse pas la théorie classique des surfaces ; il montre que les données réduites formées par la métrique plus la courbure moyenne ne suffisent pas toujours à identifier une surface compacte de façon unique.

Vérification sans détour

Ce que l'article montre : Des paires de Bonnet compactes lisses existent. Plus précisément, les auteurs construisent explicitement des tores dans $\mathbb{R}^3$ avec la même métrique et la même fonction de courbure moyenne aux points correspondants, mais qui ne sont pas congruents.

Ce qui est plausible mais n'est pas le point : Que l'exploration computationnelle et la géométrie discrète puissent guider des constructions lisses difficiles. L'article dit que cette route a été importante, mais le résultat repose sur la preuve, pas sur l'image numérique.

Ce que cela ne montre pas : Que toutes les surfaces, ou la plupart, soient ambiguës. L'énoncé d'unicité générique reste dans le décor. Ce sont des contre-exemples exceptionnels mais décisifs.

Principales limites pour un lecteur général : La preuve est très technique et appartient à la géométrie différentielle : surfaces isothermiques, classifications des paires de Bonnet, conditions de période et construction analytique. On peut comprendre le sens du théorème sans suivre toute la machinerie.

Quel degré de confiance pour un lecteur général ? Élevé sur l'énoncé du théorème comme résultat mathématique évalué par les pairs. La prudence à avoir est interprétative, pas probatoire : le lire comme « ces données géométriques réduites ne déterminent pas toujours la forme », pas comme « la géométrie ne peut pas identifier les formes ».

Sources

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>