



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dos toros pueden compartir la misma geometría local y seguir siendo formas distintas

Una construcción en Publications mathématiques de l'IHES da los primeros pares de Bonnet compactos: dos toros suaves, reales analíticos, en el espacio tridimensional, que tienen la misma métrica intrínseca y la misma curvatura media en puntos correspondientes, pero no son la misma superficie salvo por un movimiento rígido. El resultado cierra viejas preguntas de unicidad en geometría de superficies, y es un contraejemplo preciso a una idea tentadora: que suficientes mediciones locales deben identificar una forma compacta.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

La forma que se resiste a ser identificada

Imagina medir una superficie sin poder salir de ella. Puedes medir distancias a lo largo de la superficie: qué tan lejos está un punto de otro si viajas sobre la propia superficie. Esa es la métrica de la superficie. Ahora añade una medición desde fuera: en cada punto, registra la curvatura promedio de la superficie, su curvatura media.

Suena a mucha información. Para muchas superficies, basta. Si conoces las distancias intrínsecas y la función de curvatura media, podrías esperar que la forma en el espacio tridimensional quedara fijada.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann y Andrew Sageman-Furnas acaban de construir superficies compactas que derrotan esa expectativa. Su artículo da dos toros —superficies con forma de rosquilla, aunque no rosquillas redondas ordinarias— que son isométricos y tienen la misma curvatura media en puntos correspondientes, pero no son congruentes. No puedes rotar, trasladar ni reflejar uno para convertirlo en el otro. Son inmersiones genuinamente distintas en el espacio.

En el lenguaje del campo, son pares de Bonnet compactos. El artículo los llama los primeros ejemplos de ese tipo.

Cuál es el problema

La teoría clásica de superficies separa dos tipos de información.

La métrica te dice las distancias medidas sobre la superficie. Una hoja plana enrollada en un cilindro conserva la misma métrica intrínseca: una hormiga pequeña caminando sobre la hoja no notaría el enrollamiento midiendo solo distancias. La segunda forma fundamental completa dice mucho más sobre cómo se curva la superficie en el espacio. El teorema de Bonnet clásico dice que, con la métrica y todos los datos de curvatura que satisfacen las ecuaciones de compatibilidad correctas, la inmersión queda determinada salvo por un movimiento rígido.

Pero en 1867, Pierre Ossian Bonnet planteó una pregunta más afilada. ¿Qué pasa si se reduce la información de curvatura? Como la métrica ya determina intrínsecamente la curvatura gaussiana, ¿puede caracterizarse una superficie por la métrica más la función de curvatura media?

Genéricamente, la respuesta es sí. Esa palabra importa. La geometría suele tener casos excepcionales: superficies especiales en las que falla la afirmación usual de unicidad. La pregunta abierta era si existían ejemplos compactos y suaves en los que la métrica y la curvatura media coincidieran pero las superficies no fueran la misma en el espacio.

Ese es el problema global de Bonnet. El nuevo artículo lo responde con toros.

Qué construyeron los autores

Los autores construyen un par de toros suaves en $\mathbb{R}^3$ relacionados por una isometría que preserva la curvatura media. Eso significa que los puntos correspondientes tienen las mismas distancias intrínsecas a su alrededor y el mismo valor de curvatura media, pero las dos superficies no son congruentes.

La construcción hace más que producir una curiosidad numérica aislada. Los toros son reales analíticos —tan regulares como una geometría de series de potencias, no objetos rugosos remendados— y los autores prueban que, genéricamente, sus ejemplos no están relacionados por ninguna isometría ambiente. También afirman que su construcción da incontablemente muchos pares de este tipo, porque contiene un parámetro funcional.

La ruta es técnica. Usa la relación entre los pares de Bonnet y las superficies isotérmicas, una clase de superficies con coordenadas especiales de líneas de curvatura. Los ejemplos surgen al partir de toros isotérmicos con una familia de líneas de curvatura planas y aplicar una construcción que produce el par de Bonnet. Los autores dicen que el enfoque nació de experimentos computacionales con una descomposición cuadrilateral 5×7 de un toro, usando la geometría diferencial discreta como guía hacia el resultado suave.

El resultado visual es más fácil de captar que la prueba. Los dos toros del artículo tienen datos geométricos coincidentes pero una colocación global visiblemente distinta: en la figura 1 de los autores, grandes “burbujas” correspondientes quedan más cerca en un toro que en el otro. Esa diferencia visible no es un truco de dibujo. El teorema dice que las superficies no son la misma forma en el espacio, aunque los datos locales elegidos coincidan.

[figure_pair pending]

La figura 1 del artículo muestra un ejemplo numérico de los toros del par de Bonnet, presentado aquí como una figura emparejada. Los dos paneles no son dos vistas del mismo toro: son los dos toros distintos del par. Las líneas grises de malla ayudan al ojo a seguir coordenadas de superficie correspondientes, mientras que las curvas de colores marcan bucles de líneas de curvatura correspondientes. El punto de la imagen es el desajuste global: las grandes burbujas están en posiciones visiblemente distintas, aunque el teorema dice que las dos superficies tienen la misma métrica intrínseca y la misma curvatura media en puntos correspondientes.

Por qué esto no es una contradicción

El resultado no dice que la geometría sea arbitraria ni que las mediciones sean inútiles.

Dice que un conjunto particular de datos reducidos —métrica más curvatura media— no siempre basta para identificar de forma única una superficie compacta. El teorema clásico completo de unicidad usa información de curvatura más rica. La curvatura media es solo un promedio de las dos curvaturas principales. Te dice cuánto se curva la superficie en promedio en un punto, pero no conserva toda la información direccional de la curvatura.

Esa distinción es todo el punto. Dos superficies pueden coincidir en las distancias sobre la superficie

y en la curvatura promedio en cada punto correspondiente, mientras difieren en la forma en que esa curvatura se organiza en el espacio.

El artículo tampoco dice que esta ambigüedad sea típica. La introducción es cuidadosa: genéricamente, la métrica más la curvatura media determina una superficie. Los pares de Bonnet son excepcionales. Su valor está precisamente en mostrar que la excepción existe en el marco compacto, suave y analítico donde seguía sin resolverse.

Qué viejas preguntas cierra

La primera pregunta cerrada es el problema global de Bonnet: ¿existen dos inmersiones compactas suaves no congruentes en el espacio euclidiano tridimensional, relacionadas por una isometría y con la misma curvatura media en puntos correspondientes? Los autores responden que sí.

La segunda es el problema de Cohn-Vossen-Berger: ¿existen dos superficies compactas analíticas isométricas en el espacio euclidiano tridimensional que no estén relacionadas por una isometría ambiente? De nuevo, la respuesta es sí, usando los toros analíticos obtenidos por la misma construcción.

La parte analítica es importante. Ejemplos anteriores de no unicidad para superficies compactas podían depender de menor regularidad o de alteraciones locales. Estos toros no son simplemente un objeto suave con una protuberancia intercambiada en un parche. El artículo subraya que los vecindarios correspondientes no son localmente congruentes en ningún punto: la diferencia está distribuida por la construcción, no escondida en una costura.

Por qué importa

Esto es matemática pura, pero la intuición es amplia. Una forma puede estar sobredeterminada en un sentido y seguir subidentificada en otro. Lo que cuenta no es cuántos datos tienes, sino si esos datos contienen el tipo correcto de información.

Métrica más curvatura media parece fuerte porque combina distancias internas con una medida extrínseca de flexión. El par de Bonnet compacto muestra la brecha: la curvatura promedio no es toda la curvatura. El acuerdo local no siempre es identificación global. La regularidad analítica no es una garantía mágica de unicidad.

Esa es una lección útil más allá de este teorema. En geometría, los problemas inversos suelen preguntar si un conjunto de mediciones determina el objeto que las produjo. Este artículo da una respuesta nueva y precisa para un problema clásico de superficies: no siempre, incluso cuando el objeto es compacto, suave y analítico.

Resumen limpio

Bobenko, Hoffmann y Sageman-Furnas construyen los primeros pares de Bonnet compactos: dos toros suaves no congruentes en $\mathbb{R}^3$ relacionados por una isometría y con la misma curvatura media en puntos correspondientes. Sus ejemplos son reales analíticos y, genéricamente, no están relacionados por ninguna isometría ambiente, resolviendo tanto el problema global de Bonnet como la cuestión de unicidad analítica de Cohn-Vossen-Berger tal como se plantea en el artículo. El resultado no derriba la teoría clásica de superficies; muestra que los datos reducidos de métrica más curvatura media no siempre bastan para identificar de forma única una superficie compacta.

Comprobación sin rodeos

Lo que muestra el artículo: Existen pares de Bonnet compactos suaves. Más concretamente, los autores construyen explícitamente toros en $\mathbb{R}^3$ con la misma métrica y la misma función de curvatura media en puntos correspondientes, pero que no son congruentes.

Lo que es plausible pero no es el punto: Que la exploración computacional y de geometría discreta pueda guiar construcciones suaves difíciles. El artículo dice que esa ruta fue importante, pero el resultado descansa en la prueba, no en la imagen numérica.

Lo que no muestra: Que todas o la mayoría de las superficies sean ambiguas. La afirmación de unicidad genérica sigue siendo parte del contexto. Estos son contraejemplos excepcionales pero decisivos.

Principales limitaciones para un lector general: La prueba es muy técnica y vive en la geometría diferencial: superficies isotérmicas, clasificaciones de pares de Bonnet, condiciones de periodo y construcción analítica. Un lector puede entender el significado del teorema sin seguir la maquinaria.

¿Cuánta confianza debería tener un lector general? Alta en el enunciado del teorema como resultado matemático revisado por pares. La cautela adecuada es interpretativa, no probatoria: leerlo como “estos datos geométricos reducidos no siempre determinan la forma”, no como “la geometría no puede identificar formas”.

Sources

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>