



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

To toruser kan have den samme lokale geometri og alligevel have forskellig form

En konstruktion i Publications mathématiques de l'IHES giver de første kompakte Bonnet-par: to glatte, reelanalytiske toruser i det tredimensionale rum, som har den samme intrinsiske metrik og den samme middelkrumning i tilsvarende punkter, men som ikke er den samme flade på nær en stiv bevægelse. Resultatet løser gamle entydighedsspørgsmål i fladeteorien og er et præcist modeksempel på en fristende tanke: at tilstrækkeligt mange lokale målinger må kunne identificere en kompakt form.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Formen, der ikke vil lade sig identificere

Forestil dig, at du måler en flade uden at måtte bevæge dig uden for den. Du kan måle afstande langs den: hvor langt der er fra ét punkt til et andet, hvis du bevæger dig på selve fladen. Det er fladens metrik. Tilføj nu endnu en måling udefra: Registrer i hvert punkt fladens gennemsnitlige bøjning, dens middelkrumning.

Det lyder som meget information. For mange flader er det nok. Hvis man kender de intrinsiske afstande og middelkrumningsfunktionen, er det nærliggende at tro, at formen i det tredimensionale rum er entydigt bestemt.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann og Andrew Sageman-Furnas har nu konstrueret kompakte flader, der bryder med den forventning. Deres artikel beskriver to toruser – donutformede flader, men ikke almindelige runde donuts – som er isometriske og har samme middelkrumning i tilsvarende punkter, men ikke er kongruente. Man kan ikke rotere, parallelforskyde eller spejle den ene, så den bliver til den anden. De er reelt forskellige immersioner i rummet.

Med fagets terminologi er de kompakte Bonnet-par. Artiklen betegner dem som de første eksempler af denne art.

Hvad problemet går ud på

Den klassiske fladeteori skelner mellem to former for information.

Metrikken angiver afstande målt på fladen. Et fladt ark, der rulles til en cylinder, bevarer den samme intrinsiske metrik: En lille myre, der går på arket, ville ikke opdage, at det var rullet sammen, alene ved at måle afstande. Den fuldstændige anden fundamentalform fortæller langt mere om, hvordan fladen bøjer i rummet. Den klassiske Bonnets sætning siger, at når metrikken og de fuldstændige bøjningsdata opfylder de rette kompatibilitetsligninger, er immersionen bestemt på nær en stiv bevægelse.

Men i 1867 stillede Pierre Ossian Bonnet et skarpere spørgsmål. Hvad sker der, hvis bøjningsdataene reduceres? Eftersom metrikken allerede bestemmer den gaussiske krumning intrinsisk, kan en flade da karakteriseres ved metrikken sammen med middelkrumningsfunktionen?

Generisk er svaret ja. Det ord er vigtigt. I geometrien findes der ofte undtagelsestilfælde: særlige flader, hvor det sædvanlige entydighedsresultat ikke gælder. Det åbne spørgsmål var, om der fandtes kompakte, glatte eksempler, hvor metrikken og middelkrumningen stemmer overens, men fladerne ikke har samme form i rummet.

Det er det globale Bonnet-problem. Den nye artikel besvarer spørgsmålet med toruser.

Hvad forfatterne konstruerede

Forfatterne konstruerer et par glatte toruser i R^3 , der er forbundet ved en isometri, som bevarer middelkrumningen. Det betyder, at de intrinsiske afstandsforhold er de samme omkring tilsvarende punkter, og at middelkrumningen har samme værdi dér, men at de to flader ikke er kongruente.

Konstruktionen gør mere end at frembringe en enkelt numerisk kuriositet. Toruserne er reelanalytiske – de har den regularitet, der kendetegner potensrækker, og de er ikke groft sammenføjede objekter – og forfatterne beviser, at deres eksempler generisk ikke kan overføres til hinanden ved nogen isometri af det omgivende rum. De fastslår også, at konstruktionen giver overtælleligt mange sådanne par, fordi den indeholder en funktionel parameter.

Vejen dertil er teknisk. Den udnytter forbindelsen mellem Bonnet-par og isotermske flader, en klasse af flader med særlige koordinater langs krumningslinjerne. Eksemplerne fremkommer ved at tage udgangspunkt i isotermske toruser med én familie af plane krumningslinjer og anvende en konstruktion, der frembringer Bonnet-parret. Forfatterne fortæller, at fremgangsmåden voksede ud af beregningseksperimenter med en 5×7 -inddeling af en torus i firkanter, hvor diskret differentialgeometri viste vej mod det glatte resultat.

Det visuelle resultat er lettere at forstå end beviset. De to toruser i artiklen har overensstemmende geometriske data, men en synligt forskellig global placering: I forfatternes figur 1 ligger tilsvarende store ”bobler” tættere på hinanden på den ene torus end på den anden. Den synlige forskel skyldes ikke måden, figuren er tegnet på. Sætningen siger, at fladerne ikke har samme form i rummet, selv om de udvalgte lokale data stemmer overens.

[figure_pair pending]

Figur 1 i artiklen viser et numerisk eksempel på toruserne i Bonnet-parret, her gengivet som en todelt figur. De to paneler er ikke to billeder af den samme torus: De viser de to forskellige toruser i parret. De grå netlinjer gør det lettere at følge de tilsvarende fladekoordinater, mens de farvede kurver markerer tilsvarende lukkede krumningslinjer. Pointen med billedet er den globale uoverensstemmelse: De store bobler befinder sig synligt forskellige steder, selv om sætningen siger, at de to flader har samme intrinsiske metrik og samme middelkrumning i tilsvarende punkter.

Hvorfor dette ikke er en modsigelse

Resultatet siger ikke, at geometrien er vilkårlig, eller at målinger er nytteløse.

Det siger, at et bestemt reduceret datasæt – metrik plus middelkrumning – ikke altid er nok til entydigt at identificere en kompakt flade. Den fuldstændige klassiske entydighedssætning benytter mere omfattende information om bøjningen. Middelkrumningen er kun et gennemsnit af de to hovedkrumninger. Den fortæller, hvor meget fladen i gennemsnit bøjer i et punkt, men bevarer ikke alle oplysninger om bøjningen i forskellige retninger.

Netop denne forskel er hele pointen. To flader kan stemme overens både med hensyn til afstande

langs fladen og gennemsnitlig bøjning i hvert par af tilsvarende punkter, samtidig med at bøjningen er arrangeret forskelligt i rummet.

Artiklen siger heller ikke, at denne tvetydighed er typisk. Indledningen er omhyggelig: Generisk bestemmer metrik plus middelkrumning en flade. Bonnet-par er undtagelser. Deres værdi ligger netop i, at de viser, at undtagelsen findes i den kompakte, glatte og analytiske sammenhæng, hvor spørgsmålet hidtil var forblevet uløst.

Hvilke gamle spørgsmål resultatet løser

Det første spørgsmål, der bliver løst, er det globale Bonnet-problem: Findes der to ikke-kongruente kompakte, glatte immersioner i det tredimensionale euklidiske rum, som er forbundet ved en isometri og har samme middelkrumning i tilsvarende punkter? Forfatterens svar er ja.

Det andet er Cohn-Vossen–Berger-problemet: Findes der to isometriske kompakte analytiske flader i det tredimensionale euklidiske rum, som ikke kan overføres til hinanden ved en isometri af det omgivende rum? Også her er svaret ja, ved hjælp af de analytiske toruser, der fremkommer gennem den samme konstruktion.

Den analytiske del er vigtig. Tidligere eksempler på manglende entydighed for kompakte flader kunne bygge på lavere regularitet eller lokale ændringer. Disse toruser er ikke blot et glat objekt, hvor en bule i ét område er blevet udskiftet. Artiklen fremhæver, at tilsvarende nabolag intet sted er lokalt kongruente: Forskellen er udbredt gennem hele konstruktionen, ikke skjult i en samling efter en reparation.

Hvorfor det har betydning

Dette er ren matematik, men intuitionen er bred. En form kan være overbestemt i én forstand og alligevel tilstrækkeligt identificeret i en anden. Det afgørende er ikke, hvor mange data man har, men om dataene indeholder den rette slags information.

Metrik plus middelkrumning virker stærkt, fordi det kombinerer indre afstande med et mål for ydre bøjning. Det kompakte Bonnet-par viser manglen: Gennemsnitlig bøjning er ikke fuldstændig bøjningsinformation. Lokal overensstemmelse giver ikke altid global identifikation. Analytisk regularitet er ingen magisk garanti for entydighed.

Det er en nyttig lære ud over denne sætning. I geometrien handler inverse problemer ofte om, hvorvidt et sæt målinger bestemmer det objekt, der frembragte dem. Denne artikel giver et præcist nyt svar på et klassisk fladeproblem: ikke altid, selv når objektet er kompakt, glat og analytisk.

Kort fortalt

Bobenko, Hoffmann og Sageman-Furnas konstruerer de første kompakte Bonnet-par: to ikke-kongruente glatte toruser i R^3 , der er forbundet ved en isometri og har samme middelkrumning i tilsvarende punkter. Deres eksempler er reelanalytiske og kan generisk ikke overføres til hinanden ved nogen isometri af det omgivende rum, og dermed løser de både det globale Bonnet-problem og Cohn-Vossen–Berger-spørgsmålet om analytisk entydighed, sådan som det er formuleret i artiklen. Resultatet omstøder ikke den klassiske fladeteori; det viser, at de reducerede data metrik plus middelkrumning ikke altid er nok til entydigt at identificere en kompakt flade.

Nøgtern kontrol

Hvad artiklen viser: Der findes kompakte, glatte Bonnet-par. Mere konkret konstruerer forfatterne eksplicit toruser i R^3 med samme metrik og middelkrumningsfunktion i tilsvarende punkter, men som ikke er kongruente.

Hvad der er sandsynligt, men ikke hovedpointen: At beregningsbaseret og diskret-geometrisk udforskning kan lede frem mod vanskelige glatte konstruktioner. Artiklen siger, at denne vej var vigtig, men resultatet hviler på beviset, ikke på det numeriske billede.

Hvad den ikke viser: At alle eller de fleste flader er tvetydige. Det generiske entydighedsresultat gælder fortsat som en del af baggrunden. Det er usædvanlige, men afgørende, modeksempler.

De vigtigste begrænsninger for en almen læser: Beviset er meget teknisk og hører hjemme i differentialgeometrien: isotermiske flader, klassifikation af Bonnet-par, periodebetingelser og analytisk konstruktion. En læser kan forstå sætningens betydning uden at følge maskineriet.

Hvor stor tillid bør en almen læser have? Stor tillid til sætningens formulering som et fagfællebedømt matematisk resultat. Det rette forbehold gælder fortolkningen, ikke dokumentationen: Læs det som ”disse reducerede geometriske data bestemmer ikke altid formen”, ikke som ”geometrien kan ikke identificere former”.

Sources

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
<https://arxiv.org/abs/2110.06335>